

## ALGEBRA M2 - Lista dodatkowa 1

1. Niech  $V$  będzie przestrzenią liniową, a  $W$  jej podprzestrzenią. Definiujemy relację na zbiorze  $V \times V$ :

$$v \sim v' \iff v - v' \in W$$

Pokazać, że  $\sim$  jest relacją równoważności, czyli że jest zwrotna, symetryczna i przechodnia. Wywnioskować, że zbiór oznaczony symbolem  $v + W$  i zdefiniowany wzorem

$$v + W = \{v + w : w \in W\}$$

jest klasą równoważności elementu  $v \in V$ , tzn.  $v \in v + W$  oraz jeżeli  $v \sim v'$ , to  $v' = v + w$  dla pewnego  $w \in W$ .

2. Na zbiorze klas równoważności oznaczonych symbolem

$$V/W = \{v + W; v \in V\}$$

definiujemy operację dodawania

$$(v + W) + (v' + W) = (v + v') + W$$

oraz operację mnożenia przez liczby

$$\alpha(v + W) = (\alpha v) + W.$$

Wykazać, że z tak zdefiniowanymi operacjami zbiór  $V/W$  jest przestrzenią liniową (nad tym samym ciałem co  $V$ ). Jest to tzw. *ilorazowa przestrzeń liniowa*.

3. Niech  $\{w_1, \dots, w_k\}$  będzie bazą przestrzeni  $W$ , gdzie  $k$  jest skończone. Uzupełnić ten zbiór do bazy przestrzeni  $V$  postaci  $\{w_1, \dots, w_k, v_1, \dots, v_m\}$ . Pokazać, że zbiór

$$\{v_1 + W, \dots, v_m + W\}$$

jest bazą przestrzeni  $V/W$  i udowodnić wzór

$$\dim(V/W) = \dim(V) - \dim(W)$$

4. Niech  $V = \mathbb{R}^n$  oraz niech  $W = \{(0, x_2, x_3, \dots, x_n) : x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ . Wyznaczyć  $V/W$  oraz pokazać, że  $V/W \cong \mathbb{R}$ , gdzie  $\cong$  oznacza izomorfizm przestrzeni liniowych. Podać kilka podobnych przykładów przestrzeni ilorazowych izomorficznych z  $\mathbb{R}^k$  dla  $1 < k < n$ .

5. Niech  $V$  będzie przestrzenią liniową, a  $W$  jej podprzestrzenią oraz niech  $T \in L(V)$ . Zdefiniujemy  $\tilde{T}$  na klasach równoważności z  $V/W$  wzorem

$$\tilde{T}(v + W) = T(v) + W$$

Jakie warunki należy nałożyć na  $T$  aby tak zdefiniowane przekształcenie było dobrze zdefiniowanym przekształceniem liniowym?

6. Uzasadnić, że jeżeli  $V = U \oplus W$ , to mamy naturalny izomorfizm  $V/U \cong W$ .

Romuald Lenczewski